

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики

Кафедра алгебри та геометрії

## СИЛАБУС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Алгебра та теорія чисел

(шифр і назва навчальної дисципліни)

Рівень освіти	Бакалавр
	(назва рівня вищої освіти)
Галузь знань	11 — Математика та статистика
	(шифр і назва галуза)
Спеціальність(ості)	111 — Математика
	(шифр і назва спеціальності(ей))
Освітня програма	Математика
	(назва програми)

Затверджено на засіданні кафедри

Протокол №1 від 31.08.2020

## 1. ЗАГАЛЬНА ІНФОРМАЦІЯ

<b>Назва дисципліни</b>	Алгебра та теорія чисел
<b>Викладач(-і)</b>	Гаврилків В.М.
<b>Контактний телефон викладача</b>	59-60-16
<b>E-mail викладача</b>	volodymyr.gavrylkiv@pnu.edu.ua
<b>Формат дисципліни</b>	Лекції та практичні заняття
<b>Обсяг дисципліни</b>	12 кредитів
<b>Консультації</b>	Вівторок, 16 <sup>00</sup>

## 2. АНОТАЦІЯ ДО НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Навчальна дисципліна “Алгебра і теорія чисел” займає одне із центральних місць у системі професійної науково-предметної підготовки фахівця з математики. Зміст дисципліни розкривається через такі змістові модулі: “Елементи теорії чисел”, “Елементи теорії груп”, “Елементи теорії кілець”, “Кільце поліномів”.

## 3. МЕТА І ЗАВДАННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Основною метою і завданням курсу “Алгебра та теорія чисел” є формування компетентного спеціаліста в області алгебри та теорії чисел, здатного застосовувати і розвивати основні положення і методи дисципліни у науковій і навчальній діяльності, самостійно аналізувати будову алгебраїчних об’єктів, будувати математичні моделі, застосовувати апарат дисципліни до вивчення абстрактних алгебраїчних структур. Важливими завданнями є формування в студентів алгебраїчної і теоретико-числової культури, сприяння розвитку логічного та аналітичного мислення студентів, забезпечення інформацією

студентів щодо напрямків розвитку сучасної математики, формування вміння розв'язувати задачі з геометрії, аналізу, фізики, економіки, інформатики, використовуючи алгебраїчні методи.

У результаті вивчення навчальної дисципліни “Алгебра та теорія чисел” студент повинен

знати:

- основні твердження і теореми алгебри та теорії чисел;
- методи та алгоритми розв'язування задач з дисципліни;
- основні поняття абстрактної алгебри і теорії чисел, зокрема такі як множина, відношення, відображення, комплексне число, ланцюговий дріб, алгебраїчна операція, алгебраїчна структура, напівгрупа, моноїд, квазігрупа, група, абелева група, симетрична та знаковмінна групи, дієдральна група, порядок елемента групи, циклічна група, періодична група, підгрупа, множина твірних групи, ліві і праві класи розбиття групи за підгрупою, індекс підгрупи, нормальна підгрупа, факторгрупа, гомоморфізм груп, ядро та образ гомоморфізму, комутатор, комутант групи, автоморфізм групи, група автоморфізмів, внутрішній автоморфізм, зображення групи, дія групи на множині, орбіта та стабілізатор точки, спряженість елементів групи, централізатор, центр групи,  $p$ -група, силовська  $p$ -підгрупа, прямий добуток груп, кільце, комутативне кільце, кільце з одиницею, дільник нуля, дільник одиниці, ідемпотент, цілісне кільце, ідеал кільця, гомоморфізм кілець, кільце головних ідеалів, евклідове кільце, асоційовані елементи, нерозкладний елемент, найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне елементів кільця, квадратичний лишок та нелишок, символ Лежандра, алгебраїчне та трансцендентне число, поле, характеристика поля, розширення поля, поліном, симетричний поліном, поле розкладу полінома;

вміти:

- застосувати стандартні методи і алгоритми алгебри та теорії чисел при розв'язуванні задач;
- наводити приклади, які демонструють сутність теоретичних понять, фактів або спростовують хибні твердження;
- виконувати дії над множинами та відображеннями;
- виконувати наближення дійсних чисел підхідними дробами;
- виконувати операції над комплексними числами;
- перевіряти, чи є задана алгебраїчна структура напівгрупою, моноїдом, квазігрупою чи групою;
- знаходити порядок елемента групи;
- знаходити підгрупи даної групи, серед них виділяти нормальні, будувати факторгрупи;
- описувати гоморфізми заданих груп;
- встановлювати ізоморфізм груп;
- описувати комутант, центр, класи спряжених елементів групи, описувати орбіти та стабілізатори дії групи на множині, знаходити кількість орбіт;
- розкласти задану групу в прямий або напівпрямий добуток підгруп;
- знаходити силовські  $p$ -підгрупи скінченної групи;
- перевіряти, чи буде кільцем задана алгебраїчна структура;
- описувати дільники нуля та одиниці в кільці, знаходити ідеали кільця;
- ділити з остачею елементи евклідового кільця, знаходити дільники елемента кільця, обчислювати найбільший спільний дільник елементів кільця;
- користуватися теоремою Ейлера для знаходження остач від ділення;
- користуватися критерієм Ейлера та символом Лежандра;
- розв'язувати системи лінійних конгруенцій з невідомими;

- будувати прості розширення полів, знаходити степінь розширення, виконувати арифметичні дії у скінченних розширеннях полів, будувати поле розкладу многочлена.
- користуватись поняттям результанта поліномів;
- відокремлювати корені поліномів із довільною точністю.

#### 4. КОМПЕТЕНТНОСТІ ТА РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ

Загальні компетентності:

- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
- здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;
- знання й розуміння предметної області та професійної діяльності;
- здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями;
- здатність до пошуку, обробки та аналізу інформації з різних джерел;
- здатність працювати автономно;
- визначеність і наполегливість щодо поставлених завдань і взятих обов'язків.

Спеціальні (фахові, предметні) компетентності:

- здатність формулювати проблеми математично та в символній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання;
- здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів;

Програмні результати навчання:

- знати основні етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, розуміти сучасні тенденції в математиці;
- розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми;
- розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити

умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями;

- розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей;
- знати теоретичні основи і застосовувати алгебраїчні методи для вивчення математичних структур.

### 5. ОРГАНІЗАЦІЯ НАВЧАННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Обсяг дисципліни	
Вид заняття	Загальна кількість годин
Лекції	56
Практичні	64
Лабораторні	
Самостійна робота	240

Ознаки дисципліни				
Спеціальність, освітня програма	Рівень освіти	Курс (рік навчання)	Семестр	Нормативна/вибіркова
111 — Математика, Математика	Бакалавр	1-й, 2-й	2-й, 3-й, 4-й	нормативна

Тематика дисципліни						
Назви змістових модулів і тем	Кількість годин					
	вс.	лек.	пр.	лаб.	інд.	сам.
<b>Семестр 2</b>						
<b>Змістовий модуль 1. Елементи теорії чисел.</b>						

Тематика дисципліни						
Назви змістових модулів і тем	Кількість годин					
	вс.	лек.	пр.	лаб.	інд.	сам.
Тема 1. Множини. Відношення. Властивості відношень. Розбиття множин та відношення еквівалентності. Функції. [1, 6, 7, 10]	17	2	3			12
Тема 2. Множина натуральних чисел. Метод математичної індукції. Прості числа. Теорема Евкліда. Мультиплікативні функції натурального аргументу. Кількість та сума натуральних дільників натурального числа. [1, 6, 7, 11]	17	2	3			12
Тема 3. Цілі числа. Подільність. Алгоритм Евкліда. НСД і НСК. Функція Ейлера. Ціла і дробова частина дійсного числа. [1, 6, 7, 11]	17	2	3			12
Тема 4. Неперервні (ланцюгові) дроби. Підхідні дроби та їх властивості. Застосування неперервних дробів до розв'язування рівнянь першого степеня з двома невідомими. Наближення дійсних чисел підхідними дробами. [1, 6, 11]	20	4	4			12
Тема 5. Комплексні числа. Алгебраїчна та тригонометрична форми запису. Формула Муавра. Добування коренів з комплексних чисел. [6, 7]	17	2	3			12
Тема 6. Контрольна робота.	2		2			
Всього за модуль:	90	12	18			60
Всього за семестр:	90	12	18			60
<b>Семестр 3</b>						
<b>Змістовий модуль 2. Елементи теорії груп.</b>						
Тема 7. Означення напівгрупи, моноїда, квазігрупи та групи. Різні підходи до визначення поняття групи. Підгрупи. Множини твірних і визначальних співвідношень групи. Приклади груп. [3, 4, 5, 9]	12	2	2			8

Тематика дисципліни						
Назви змістових модулів і тем	Кількість годин					
	вс.	лек.	пр.	лаб.	інд.	сам.
Тема 8. Симетрична і знаковмінна групи. Групи симетрій і дієдральні групи. Група Клейна. [4, 5, 7, 9]	12	2	2			8
Тема 9. Циклічна група. Будова циклічної групи. Порядок елемента. Поняття періодичної групи та групи без кручень. [3, 4, 5, 9]	11	2	2			7
Тема 10. Розбиття групи за підгрупою. Індекс підгрупи в групі. Теорема Лагранжа та наслідки з неї. [2, 4, 5, 9]	10	2	2			6
Тема 11. Нормальні підгрупи в групі. Різні підходи до визначення поняття нормальної підгрупи. Прості групи. Факторгрупи за нормальними підгрупами. [4, 5, 8, 9]	10	1	2			7
Тема 12. Морфізми груп. Ядро і образ гомоморфізму. Поняття про лінійні зображення груп. Основна теорема про гомоморфізми. Теорема Келі. [4, 5, 9, 13]	11	2	2			7
Тема 13. Дія групи на множині. Стабілізатори і орбіти. Дія спряження. Нормалізатор. Централізатор. Центр групи. Нетривіальність центру $p$ -групи. [4, 5, 8, 9]	11	2	2			7
Тема 14. Комутант групи та його властивості. Ряди груп. Розв'язні групи. Критерій розв'язності. Розв'язність $p$ -групи. [2, 4, 5, 9]	11	2	1			8
Тема 15. Зовнішній та внутрішній прямі добутки груп. Пряма сума груп. Напівпрямий добуток. [4, 5, 7, 8, 9]	9	1	1			7
Тема 16. Теорема Силова та її застосування. Групи порядків $p$ , $p^2$ , $pq$ . Групи 8-го порядку. [2, 4, 5, 8]	12	2	2			8
Тема 17. Контрольна робота.	2		2			
Всього за модуль:	111	18	20			73



Тематика дисципліни						
Назви змістових модулів і тем	Кількість годин					
	вс.	лек.	пр.	лаб.	інд.	сам.
<b>Змістовий модуль 3. Елементи теорії кілець.</b>						
Тема 18. <i>Кільце, тіло, поле. Цілісне кільце. Підкільце. Характеристика кільця.</i> [3, 4, 8, 14]	11	2	2			7
Тема 19. <i>Гомоморфізми та ідеали кілець. Факторкільце. Основна теорема про гомоморфізми. Порядок скінченного поля. Максимальні та прості ідеали кілець.</i> [3, 4, 8, 15]	12	2	2			8
Тема 20. <i>Евклідове кільце. Евклідовість кільця цілих гаусових чисел. Подільність і алгоритм Евкліда. Характеризація простих елементів кільця.</i> [3, 4, 8, 14, 15]	11	2	1			8
Тема 21. <i>Конгруенції в кільці цілих чисел. Властивості і застосування конгруенцій. Теорема Ейлера. Мала теорема Ферма.</i> [1, 4, 6, 11]	11	2	1			8
Тема 22. <i>Конгруенції і системи конгруенцій з одним невідомим. Теорема Вільсона. Китайська теорема про лишки. Поняття про показники та первісні корені.</i> [1, 4, 6, 11]	12	2	2			8
Тема 23. <i>Конгруенції 2-го степеня. Квадратичні лишки. Критерій Ейлера. Символ Лежандра. Закон взаємності квадратичних лишків.</i> [1, 6, 11]	11	2	1			8
Тема 24. <i>Контрольна робота.</i>	1		1			
Всього за модуль:	69	12	10			47
Всього за семестр:	180	30	30			120
<b>Семестр 4</b>						
<b>Змістовий модуль 4. Кільце поліномів.</b>						

Тематика дисципліни						
Назви змістових модулів і тем	Кількість годин					
	вс.	лек.	пр.	лаб.	інд.	сам.
Тема 25. Побудова кільця поліномів. Алгебраїчні та трансцендентні елементи над полем. Розширення полів. [4, 6, 12, 7, 15]	8	1	1			6
Тема 26. Подільність в кільці поліномів від однієї змінної. Евклідовість кільця поліномів. НСД і НСК. Незвідні поліноми. Факторкільця за головними ідеалами, породженими незвідними поліномами. [4, 6, 7, 12, 14]	11	2	2			7
Тема 27. Корені поліномів. Теорема Безу. Схема Горнера. Кількість коренів полінома. Інтерполяційні поліноми Лагранжа і Ньютона. Існування коренів. Теорема Кронекера. [6, 7, 12, 14]	11	2	2			7
Тема 28. Похідна полінома. Встановлення кратності кореня полінома. Відокремлення кратних множників. [6, 7, 12]	9	1	2			6
Тема 29. Кільце поліномів від багатьох змінних. Лексикографічне розміщення членів полінома. [6, 7, 12]	9	1	1			7
Тема 30. Симетричні поліноми. Основна теорема про симетричні поліноми. [6, 7, 12]	9	1	1			7
Тема 31. Результант поліномів. Дискримінант полінома. [6, 7, 12]	10	2	1			7
Тема 32. Поліноми над числовими полями. Основна теорема алгебри. Розклад полінома у добуток незвідних множників над числовими полями. Критерій Ейзенштейна. [6, 7, 12]	11	2	2			7
Тема 33. Межі дійсних коренів полінома. Спосіб Ньютона. Відокремлення коренів полінома методом Штурма. [6, 7, 12]	10	2	2			6
Тема 34. Контрольна робота.	2		2			
Всього за модуль:	90	14	16			60

Тематика дисципліни						
Назви змістових модулів і тем	Кількість годин					
	вс.	лек.	пр.	лаб.	інд.	сам.
Всього за семестр:	90	14	16			60
Усього годин:	360	56	64			240

## 6. СИСТЕМА ОЦІНЮВАННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Володіння матеріалом дисципліни студенти виявляють при написанні аудиторної контрольної роботи і колоквіуму у другому семестрі, двох аудиторних контрольних робіт і двох колоквіумів у третьому семестрі та аудиторної контрольної роботи і колоквіуму у четвертому семестрі. Бали між контрольними роботами і колоквіумами розподіляються рівномірно.

За активну і змістовну участь у розв'язуванні задач на практичних заняттях оцінка за кожен модуль може бути підвищена щонайбільше на 5 балів.

Отримана за семестр сума балів множиться на такий коефіцієнт, щоб максимальна можлива сума балів (без додаткових) становила 50.

Максимальна можлива оцінка на іспиті — 50 балів. Сума балів за семестр та за іспит визначає підсумкову оцінку згідно поданої нижче таблиці.

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка ЄКТС	Оцінка за національною шкалою
90 – 100	A	відмінно
80 – 89	B	добре
70 – 79	C	добре
60 – 69	D	задовільно
50 – 59	E	достатньо
1 – 49	FX	незадовільно

## 7. ПОЛІТИКА КУРСУ

Самостійне та своєчасне виконання завдань поточного та підсумкового контролю результатів навчання (для осіб з особливими освітніми потребами ця вимога застосовується з урахуванням їхніх індивідуальних потреб і можливостей). Плагіат та інші види академічної недоброчесності не принесуть позитивного результату, тому не рекомендуються.

Відвідування занять є обов'язковим. За об'єктивних причин навчання може відбуватись індивідуально. Пропуск лекції з неповажної причини відпрацьовується студентом відповідно до вимог кафедри (співбесіда, реферат, опрацювання рекомендованої літератури тощо). Пропущені практичні заняття студент відпрацьовує згідно з графіком консультацій. Поточні "незадовільно"отримані студентом під час засвоєння відповідної теми перескладаються викладачеві до складання підсумкового контролю з обов'язковою відміткою у журналі обліку роботи академічних груп.

## 8. РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Безущак О.О. *Елементи теорії чисел* / О.О. Безущак, О.Г. Ганюшкін. – Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2003. – 202 с.
2. Белоногов В.А. *Задачник по теории групп* / В.А. Белоногов. – Москва: Наука, 2000. – 239 с.
3. Ван дер Варден Б.Л. *Алгебра* / Б.Л. ван дер Варден. – Москва: Наука, 1976. – 648 с.
4. Гаврилків В.М. *Елементи теорії груп та теорії кілець: навчальний посібник* / В.М. Гаврилків. – Івано-Франківськ: Голіней, 2016. – 148 с.
5. Ганюшкін О.Г. *Завдання до практичних занять з алгебри і теорії чисел (теорія груп)* / О.Г. Ганюшкін, О.О. Безущак. – Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2007. – 103 с.

6. Завало С.Т. *Алгебра і теорія чисел. Практикум. Частина 2* / С.Т. Завало, С.С. Левищенко та ін. – Київ: Вища школа, 1986. – 264 с.
7. Кострикин А.И. *Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры: Учебник для вузов* / А.И. Кострикин. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 272 с.
8. Кострикин А.И. *Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры: Учебник для вузов* / А.И. Кострикин. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 272 с.
9. Монахов В.С. *Введение в теорию конечных групп и их классов: Учебное пособие* / В.С. Монахов. – Гомель: УО «ГГУ им. Ф.Скорины», 2003. – 322 с.
10. Никифорчин О.Р. *Элементы загальної топології* / О.Р. Никифорчин. – Івано-Франківськ: Голіней, 2015. – 240 с.
11. Пилипів В.М. *Класичні основи теорії чисел: навчально-методичний посібник* / В.М. Пилипів, Р.А. Заторський, І.І. Ліщинський. – Івано-Франківськ: Плай, 2014. – 68 с.
12. Пилипів В.М. *Кільце поліномів: навчально-методичний посібник* / В.М. Пилипів, Р.А. Заторський, І.І. Ліщинський. – Івано-Франківськ: Плай, 2014. – 100 с.

#### **Додаткова література**

13. Скорняков Л.А. *Элементы алгебры: Учебное пособие* / Л.А. Скорняков. – Москва: Наука, 1980. – 240 с.
14. Dummit D.S. *Abstract Algebra* / David S. Dummit, Richard M. Foote. – Wiley Intern. Ed., Chichester: Wiley, 2004. – 932 p.
15. Judson T.W. *Abstract Algebra: Theory and Applications* / Thomas W. Judson. – An open-source textbook available at <http://abstract.ups.edu>, 2012. – 428 p.

Викладач

Гаврилків В.М.